

Пожиратель кактусов

Переформулируем задачу. Выберем случайную перестановку вершин. Будем удалять вершины в порядке этой перестановки, каждый раз прибавляя к выделенной энергии размер ее компоненты связности в текущий момент. Несложно показать, что такой процесс эквивалентен исходному.

Пусть C_i — компонента связности вершины i перед ее удалением. В таком случае, нам необходимо посчитать $\mathbb{E}[\sum_i C_i]$, которое в силу линейности равно $\sum_i \mathbb{E}[C_i] = \sum_i \sum_j \mathbb{P}[j \in C_i]$. То есть фактически для каждой пары вершины необходимо найти вероятность того, что в момент удаления первой от нее был путь до второй.

Решим сначала задачу на дереве. Для того, что в момент удаления вершины i в ее компоненте связности была вершина j , необходимо, чтобы вершина i была удалена первой из всех вершин на пути между i и j , включая концы. Вероятность этого равна $\frac{1}{k}$, где k — количество вершин на этом пути. То есть ответ для дерева равен $\sum_{i,j} \frac{1}{\text{distance}(i,j)+1}$, и его легко посчитать за квадратичное время.

Ответ для случая кактуса можно посчитать с помощью формулы включений-исключений. То есть необходимо:

- просуммировать вероятность того, что вершина будет удалена последней на каждом пути;
- вычесть вероятность того, что вершина будет удалена последней на каждом объединении двух путей;
- прибавить вероятность того, что вершина будет удалена последней на каждом объединении трех путей;
- ...

и так далее.

Формально, пусть P — множество простых путей из i в j . Тогда $\mathbb{P}[j \in C_i] = \sum_{P' \subset P} (-1)^{|P'|} \frac{1}{|\bigcup P'|}$.

Но в этой сумме элементов слишком много элементов, чтобы считать ее напрямую. Поэтому вместо этого будем с помощью динамического программирования считать сумму коэффициентов при вершинах с фиксированным размером объединения.

Кактус можно представить в виде дерева блоков-точек сочленения (https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Граф_блоков-точек_сочленения), причем каждый блок будет циклом. Подвесим его по очереди за каждую вершину. С помощью динамического программирования будем считать суммарный коэффициент при $\frac{1}{d}$ для всех d от корня поддерева для всех вершин в поддереве. Если вершина дерева блоков — обычная вершина, то ответ для нее — сумма ответов по всем детям, сдвинутая на 1. Если же вершина дерева блоков — это цикл, то необходимо просуммировать ответы, по всем вершинам в цикле со сдвигом на количество взятых вершин из цикла. При этом для каждой вершины есть три варианта. Нужно или взять одну ветку цикла, или другую, или весь цикл. Причем, весь цикл нужно взять с коэффициентом -1 .