Кусочно-линейные функции

Для удобства будем считать, что все $a_i \geqslant 0$. Если $a_i < 0$, то можно заменить знак у a_i и b_i на противоположный, и значение $|a_i x + b_i|$ не поменяется.

Введём обозначение

$$c_i = -\frac{b_i}{a_i}.$$

Выражение с модулем $|a_i x + b_i|$ можно записать как $|a_i(x - c_i)|$. Если $x \geqslant c_i$, то модуль раскроется как $a_i \cdot x - a_i \cdot c_i$, иначе — как $-a_i \cdot x + a_i \cdot c_i$.

Пока забудем про свободные члены $\pm a_i \cdot c_i$ и посмотрим на коэффициент при x. На отрезке между x_i и x_{i+1} коэффициент при x должен быть равен

$$\frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}.$$

Давайте создадим $n-1$ слагаемых $\pm|a_i(x - c_i)|$, в качестве c_i взяв значения $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Раскроем все модули. Тогда на отрезке $x \in [x_1, x_2]$ только первое выражение $|a_1(x - c_1)|$ раскроется с плюсом, а остальные — с минусом. На отрезке $x \in [x_2, x_3]$ первые два выражения $|a_1(x - c_1)|$ и $|a_2(x - c_2)|$ раскроются с плюсом, а остальные — с минусом. Продолжим это, и получим систему уравнений относительно коэффициентов при x:

$$a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_{n-1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

$$a_1 + a_2 - a_3 - \ldots - a_{n-1} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3},$$

$$a_1 + a_2 + a_3 - \ldots - a_{n-1} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4},$$

$$\ldots$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} = \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}.$$

Нужно найти из этой системы все значения a_i. Это нетрудно сделать для $a_2, \ldots, a_{n-1}$, посмотрев на разности соседних строчек. Например, вычтя из второй строки первую, получим

$$2a_2 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Это позволит нам явно найти все значения a_i, кроме a_1. Подставив их в одно из уравнений, можно выразить a_1.

В процессе мы можем получить отрицательные значения a_i. Но в начале мы договорились, что все $a_i \geqslant 0$. Вместо того, чтобы использовать отрицательное a_i, возьмём выражение $-|a_i(x - c_i)|$ со знаком минус. Тогда a_i раскроется с противоположным знаком.

Итак, мы получили модульную функцию, которая имеет те же коэффициенты при x, что и кусочно-линейная функция, на всех подотрезках $[x_i, x_{i+1}]$. Это значит, что текущая функция отличается от искомой на константу. Можно явно посчитать значение в одной точке, затем прибавить последнее слагаемое $|0x + b_n|$ или $-|0x + b_n|$, чтобы завершить решение.

Альтернативное решение

Пусть $f(x)$ — данная нам кусочно-линейная функция, $g(x)$ — модульная функция, которую мы строим, $h(x) = f(x) - g(x)$. Давайте постепенно строить $g(x)$ с целью сделать $h(x)$ тождественно равной нулю.

Посмотрим на производные кусочно-линейной функции $f(x)$ на её отрезках. Имеется $n-1$ отрезков непрерывности, обозначим производные на них как $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$. Аналогично предыдущему решению, получим формулу

$$k_i = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}.$$

Посмотрим на точку излома x_i, $2 \leqslant i \leqslant n-1$. В окрестности слева от неё производная равна k_{i-1}, справа — k_i. Мы хотим создать такой же излом в функции $g(x)$. Это не всегда можно сделать с помощью одного слагаемого, но мы может обеспечить скачок производной на величину $k_i - k_{i-1}$. Если $k_i \geqslant k_{i-1}$, добавим в $g(x)$ слагаемое

$$|0.5(k_i - k_{i-1}) \cdot (x - x_i)|,$$

а если $k_i < k_{i-1}$, то добавим слагаемое

$$-|0.5(k_i - k_{i-1}) \cdot (x - x_i)|.$$

После добавления всех $n-2$ таких слагаемых, получим следующее: $g(x)$ до x_1 имеет какие-то значения и какую-то производную, это нами не учтено. Но в каждой точке излома $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ производная функций $f(x)$ и $g(x)$ изменяется на одно и то же значение. Из этого следует, что на данный момент функция $h(x) = f(x) - g(x)$ является линейной на отрезке $[x_1, x_n]$.

Осталось добавить к $g(x)$ два слагаемых, который будут тождественно равны $h(x)$ на отрезке $[x_1, x_n]$. Точное значение $h(x)$ можно узнать, явно посчитав $f(x) - g(x)$ в точках x_1 и x_n. Теперь нужно с помощью двух слагаемых $\pm|a_{n-1}x + b_{n-1}| \pm |a_n x + b_n|$ построить произвольную линейную функцию на отрезке $[x_1, x_n]$. Это можно сделать, например, слагаемыми вида

$$\pm|a_{n-1}(x - x_1)| \pm |0x + b_n|.$$

Подробности мы оставляем на раздумье читателям.