

Mex and Cards

Идея: Михаил Мирзаянов
Разработка: Геннадий Короткевич

Поймём, как посчитать максимальную сумму *mex*-ов.

Во-первых, нет смысла делать больше a_0 кучек карт — для того, чтобы у кучки был положительный *mex*, в ней должна быть хотя бы одна карта со значением 0. В то же время, нет смысла класть две карты со значением 0 в одну кучку — всегда можно выделить одну из этих карт в новую кучку с $\text{mex} = 1$, улучшив ответ. Значит, мы будем делать ровно a_0 кучек.

С картами со значением 1 ситуация похожая. Если $a_1 < a_0$, положим все карты со значением 1 в разные кучки. Тогда у $a_0 - a_1$ кучек значение *mex* зафиксировано на 1, и его больше нельзя будет улучшить. Остальные же a_1 кучек можно будет продолжать. Если же $a_1 \geq a_0$, то положим по одной карте со значением 1 в каждую кучку, а остальные — куда угодно. Тогда все a_0 кучек можно будет использовать дальше.

Легко понять, что такая жадная стратегия будет оптимальной. При этом для любого $k = 0, 1, \dots, n - 1$ значение $\text{mex} > k$ будут иметь $\min(a_0, a_1, \dots, a_k)$ кучек. Следовательно, ответ на задачу равен сумме префиксных минимумов в массиве a :

$$a_0 + \min(a_0, a_1) + \min(a_0, a_1, a_2) + \dots + \min(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Как обрабатывать изменения? Пусть мы добавили новую карту со значением v , и таким образом число карт a_v со значением v увеличилось с x до $x + 1$. Есть два случая:

- Если $\min(a_0, a_1, \dots, a_{v-1}) \leq x$, то ни одного префиксного минимума от увеличения a_v не изменится.
- Если $\min(a_0, a_1, \dots, a_{v-1}) > x$, то префиксный минимум на отрезке $[a_0, a_1, \dots, a_v]$ увеличится на 1, со значения x до значения $x + 1$. Но также могут увеличиться и несколько следующих префиксных минимумов. Найдём ближайшую позицию $i > v$ такую, что $a_i \leq x$. Тогда минимум на префиксе $[a_0, a_1, \dots, a_{i-1}]$ ещё увеличится, а на префиксе $[a_0, a_1, \dots, a_i]$ — уже нет. Так как ответ на задачу равен сумме префиксных минимумов, то всего ответ на задачу увеличится ровно на $i - v$.

При удалении карты со значением v и уменьшением a_v с $x + 1$ до x все действия симметричны, только вместо слова “увеличение” в предыдущем абзаце следует читать “уменьшение”.

Чтобы быстро искать первую позицию со значением не более x в изменяющемся массиве, можно использовать спуск по дереву отрезков на минимум. Сложность решения составит $O((n + q) \log n)$.