

K-Shaped Figures

Идея: Геннадий Короткевич
Разработка: Павел Кунявский

Тривиальное решение состоит в переборе всех троек отрезков и проверки условия задачи для каждого такой тройки. Такое решение будет требовать $O(n^3)$ проверок и является слишком долгим.

Для ускорения заметим, что одно из условий достаточно сильно ограничивает возможные хорошие тройки отрезков. А именно, если перебрать отрезок, являющийся «основанием» буквы К, то все остальные отрезки можно разбить на группы по общему концу, лежащему на этом отрезке, за линейное время с помощью хеш-таблицы, или за $O(n \log n)$ с помощью сортировки. В качестве двух других отрезков в тройке с отрезком-«основанием» имеет смысл выбирать только отрезки из одной группы. Однако, если почти все отрезки будут сходиться в одной точке, такое решение все еще будет работать за $O(n^3)$, хоть и с заметно более хорошей скрытой константой.

Для достаточно быстрого решения необходимо научиться обрабатывать каждую группу за около-линейное время. В группе нужно найти отрезки, которые будут направлены в одну сторону относительно основания, и при этом не сонаправлены друг с другом. Для этого нужно найти количество пар, направленных в одну сторону относительно отрезка (что легко сделать за линейное время, посчитав количество направленных в каждую из двух сторон), и вычесть количество пар сонаправленных. Для подсчёта последнего количества нужно отнормировать каждый вектор, соответствующий отрезку, чтобы сонаправленные вектора стали одинаковыми, и посчитать количество пар одинаковых. Для нормировки вектора можно поделить на их длину или, чтобы обойтись без вещественных чисел, на наибольших общий делитель их координат. Количество пар одинаковых можно найти, сгруппировав одинаковые отрезки с помощью хеш-таблицы или сортировки. Такое решение потребует $O(n)$ или $O(n \log n)$ времени в зависимости от реализации.

Таким образом, суммарное время работы решения составит $O(n^2)$ или $O(n^2 \log n)$.