Focusing on Costs

Идея: Артем Васильев
Разработка: Артем Васильев

Докажем по индукции, что можно получить все числа вида $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $b \geq 1$. Для этого реализуем процедуру, подобную алгоритму Евклида. Базой индукции будет случай $a = b = 1$, для этого достаточно вычислить `cos(0)`. Рассмотрим переходы.

- $a < b$. Нарисуем прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b-a}$. Его гипотенуза равна $\sqrt{a + (b-a)} = \sqrt{b}$. Посмотрим на угол, противолежащий катету $\sqrt{a}$. Тангенс этого угла равен $\sqrt{\frac{a}{b-a}}$, а синус — $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

  Таким образом, чтобы от $\sqrt{\frac{a}{b-a}}$ перейти к $\sqrt{\frac{a}{b}}$, достаточно применить `atan`, а затем `sin`.

- $a > b$. Научимся переворачивать дробь $\sqrt{\frac{a}{b}}$, таким образом, сводиться к предыдущему случаю. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$. Тогда тангенсы двух острых углов равны $\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\sqrt{\frac{b}{a}}$. Чтобы заменить угол α на угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$, можно, к примеру, вычислить `acos(sin(`α`))`.

  В итоге, чтобы перевернуть дробь $\sqrt{\frac{a}{b}}$, можно применить четыре операции: `atan`, `sin`, `acos`, `tan`.

Применяя этот алгоритм к паре (a^2, b^2), мы получим искомое выражение. Его длина не превосходит $4\max(a,b)^2$.