IQ Game

Идея: Артем Васильев
Разработка: Артем Васильев

Воспользуемся формулой подсчета математического ожидания неотрицательной целочисленной случайной величины X:

$$\mathbb{E}X = \mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X > 1) + \ldots$$

Интуитивно ее можно интерпретировать следующим образом: чтобы найти матожидание числа оставшихся раундов, посчитаем вероятность, что мы сыграем первый раунд ($\mathbb{P}(X > 0) = 1$), прибавим вероятность, что мы сыграем второй раунд ($\mathbb{P}(X > 1)$) и так до бесконечности (но в нашей задаче $\mathbb{P}(X > k) = 0$, и дальше суммировать смысла нет).

Повернем стол так, чтобы гиперблиц оказался в ячейке с номером 1, и пронумеруем оставшиеся вопросы в порядке **против часовой стрелки**: $1 < q_2 < q_3 < \ldots$. В каких ситуациях после m вопросов ни разу не выпал гиперблиц?

- В полуинтервал $[1, q_2)$ мы не должны попасть ни разу,
- В полуинтервал $[1, q_3)$ мы можем попасть не более одного раза,
- В полуинтервал $[1, q_4)$ мы можем попасть не более двух раз,
- ...
- В полуинтервал $[1, q_i)$ мы можем попасть не более $i - 2$ раз.

Посчитать вероятность таких исходов можно, используя динамическое программирование. Обозначим за $P_{i,j}$ вероятность события «После j раундов не выпал гиперблиц, а все выпавшие сектора принадлежали первым i полуинтервалам». Чтобы сделать переход из такого состояния, переберем, сколько раз волчок указывал на сектор внутри $i+1$-го полуинтервала (обозначим это за x), и перейдем в $P_{i+1,j+x}$, при условии, что $j + x$ не превосходит $i - 1$. Вероятность перехода при этом нужно домножить на $\binom{j+x}{x}(\frac{q_{i+1}-q_i}{n})^x$: выбрать, какие x из $j + x$ попали в текущий полуинтервал, и вероятность каждого отдельного выпадания (x раз).

После обработки всех полуинтервалов слева направо, на основе значений $P_{k,*}$, используя самую первую формулу из этого разбора, можно найти матожидание. Всего в решении $O(k^2)$ состояний, а каждый переход занимает $O(k)$ времени. Общее время работы — $O(k^3)$.